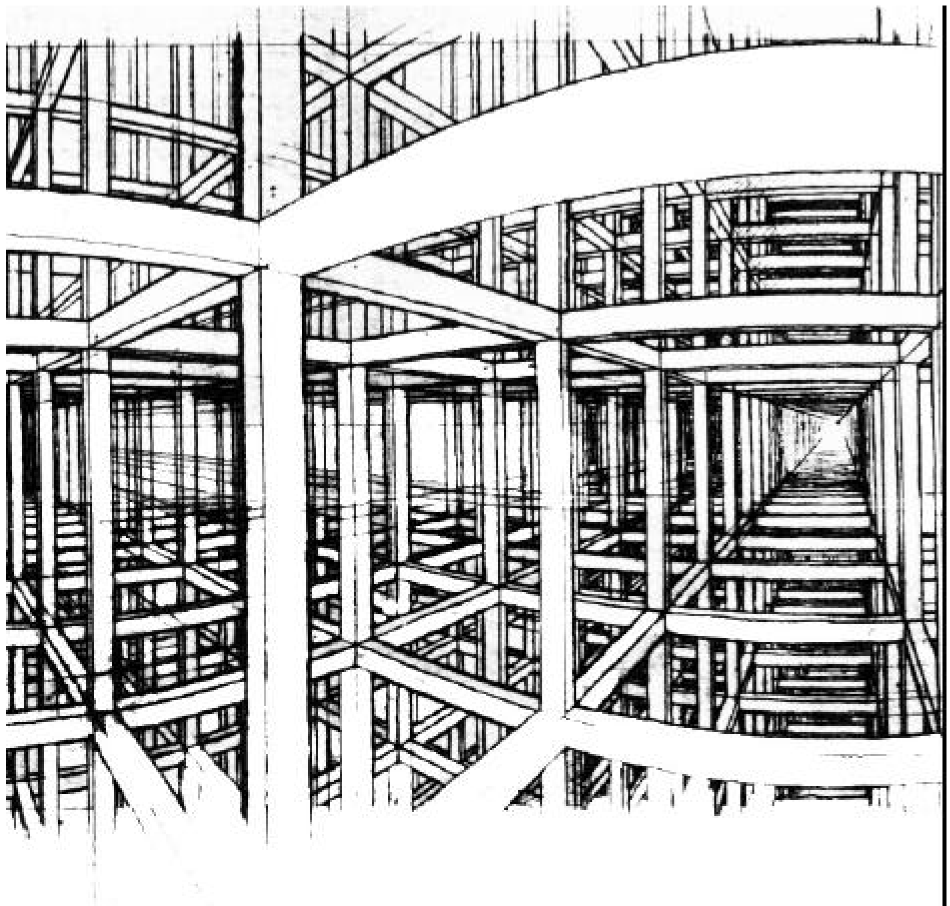
UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
DEPARTAMENTO CIENCIAS DE LA CONSTRUCCIÓN



DEFORMACIONES EN VIGAS

Materia: Estructura II

Folio: EST 2-01

Fecha: Julio/2000

Autores: Arqto. Verónica Veas B.
Arqto. Jing Chang Lou.

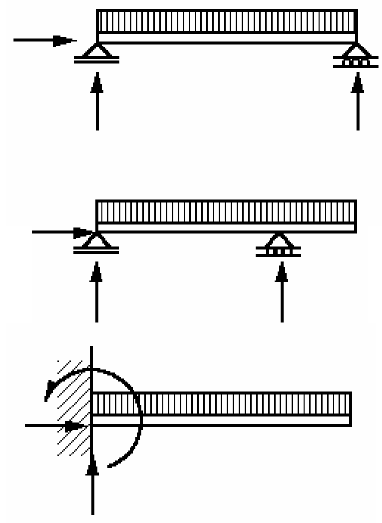
I.- INTRODUCCION

El análisis estructural de las vigas suele dividirse en vigas isostáticas e hiperestáticas. Recordemos que esta división corresponde a las condiciones de apoyo que presente el elemento a analizar Si la viga tiene un número igual o inferior a tres incógnitas en sus reacciones, bastará con aplicar las condiciones de equilibrio estático para resolverla.

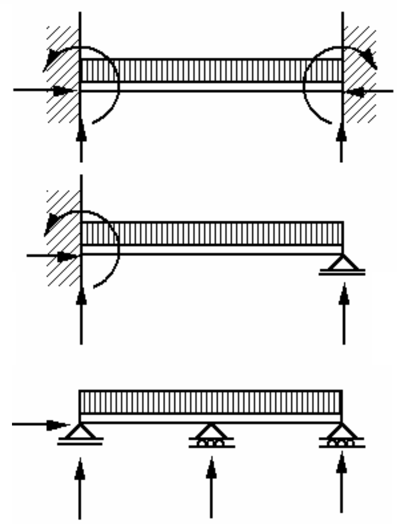
$\Sigma Fx = 0$ $\Sigma Fy = 0$ $\Sigma M = 0$

Si en cambio, la viga presenta un mayor número de incógnitas, no bastará con las ecuaciones antes indicadas, sino que será necesario incorporar nuevas expresiones.

Para abordar el análisis de las vigas hiperestáticas o estáticamente indeterminadas resulta necesario analizar las deformaciones que experimentará la viga, luego de ser cargada. Las distintas cargas sobre la viga generan tensiones de corte y flexión en la barra, y a su vez la hacen deformarse. El análisis de las deformaciones tiene básicamente dos objetivos. Por una parte, el poder obtener nuevas condiciones, que traducidas en ecuaciones, nos permitan resolver las incógnitas en vigas hiperestáticas. Y por otra parte, las deformaciones en sí, deben ser limitadas. Los envigados de madera o acero, por ejemplo, pueden quedar correctamente diseñados por resistencia, vale decir, no se romperán bajo la carga, pero podrán deformarse más allá de lo deseable, lo que llevaría consigo el colapso de elementos de terminación como cielos falsos o ventanales. No resulta extraño entonces que muchos dimensionamientos queden determinados por la deformación y no por la resistencia.



VIGAS ISOSTATICAS

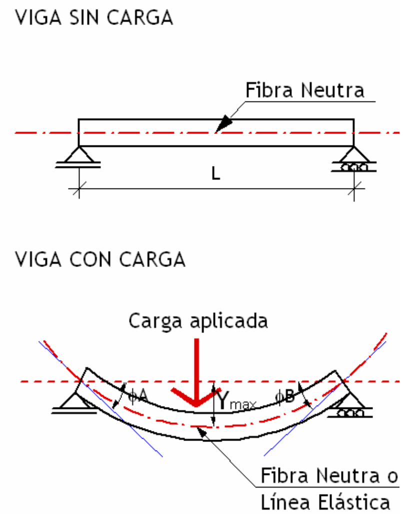


VIGAS HIPERESTATICAS

II.- DEFORMACION EN VIGAS

1.- LINEA ELASTICA o ELASTICA

Denominaremos línea elástica a la curva que forma la fibra neutra una vez cargada la viga, considerando que ésta se encontraba inicialmente recta.



2.- SUPUESTOS BASE.

Para establecer una serie de relaciones al interior de la sección, indicamos que se trata de una viga, cuyo material se encuentra solicitado dentro del rango de proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, y en donde se admite la conservación de las caras planas. Dicho en otra forma, donde se cumplen la ley de Hooke y la hipótesis de Bernouilli-Navier.

a.- LEY DE HOOKE.

Establece que la relación entre la tensión y la deformación unitaria es una constante y se denomina módulo de elasticidad.

1. $$E = \frac{\tau}{\varepsilon}$$

E = Elasticidad (kg/cm^2).
τ = Tensión (kg/cm^2)
e = Deformación Unitaria

o expresado de otra forma:

$$\tau = E\,e$$

b.- DEDUCCION DE LA FORMULA DE FLEXION

De la deducción realizada para dimensionar elementos sometidos a la flexión simple sabemos que:

2. ? $$\tau = \frac{MV}{I}$$

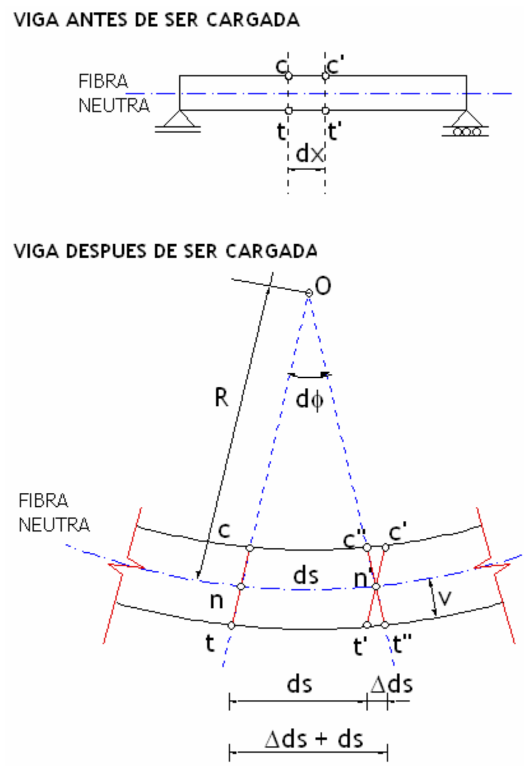
τ = Tensión (kg/cm^2)
M = Momento flector (kg.cm).
V = Distancia desde la fibra neutra a la fibra más traccionada o más comprimida. (cm).
I = Inercia (cm^4).

Si igualamos las expresiones **1.** y **2.** tenemos que:

$$E\varepsilon = \frac{MV}{I} \qquad o$$

3. $$\varepsilon = \frac{MV}{EI}$$

c.- ANALISIS DE LA SECCION



La sección cc’tt’, inicialmente recta, se curva con un radio R como indica el gráfico.

La fibra cc’ se acorta a cc”.
La fibra tt’ se alarga a tt”, y
La fibra nn’ permanece del mismo largo.

Por triángulos semejantes non’ y t’n’t” obtenemos

4. $$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{V}{R} = \varepsilon \text{ ??(Deformación unitaria)}$$

El arco es igual al producto del ángulo por el radio.

$$ds = d\phi\ R \qquad o$$

5. $$\frac{I}{R} = \frac{d\phi}{ds}$$

Igualando las ecuaciones **3.** con **4.**, obtenemos:

$$\frac{V}{R} = \frac{MV}{EI} \qquad /:V$$

o $$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

Reemplazamos en la ecuación **5.**

$$\frac{I}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{d\phi}{ds}$$

$$d\phi = \frac{M.ds}{EI}$$

Como nos estamos refiriendo a una sección infinitamente pequeña, la diferencia entre un arco y su proyección horizontal es mínima: $ds \approx dx$

La expresión final indica que la curvatura de la línea elástica es una variable proporcional al momento flector.

$$d\phi = \frac{M.dx}{EI}$$

3.- METODOS DE CALCULO

Existen diferentes métodos para abordar el análisis de las deformaciones en las vigas:

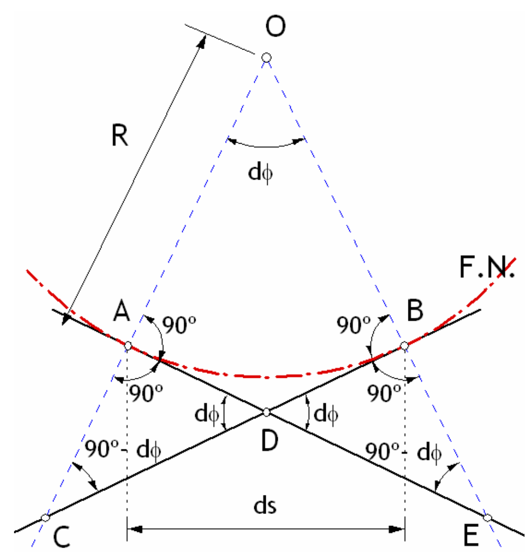
Método de Área de Momentos.
Método de Doble Integración.
Método de la Viga Conjugada.

Si bien, todos presentan su mecánica propia, a la vez tienen una partida común, que es justamente el análisis de la elástica expuesto anteriormente.

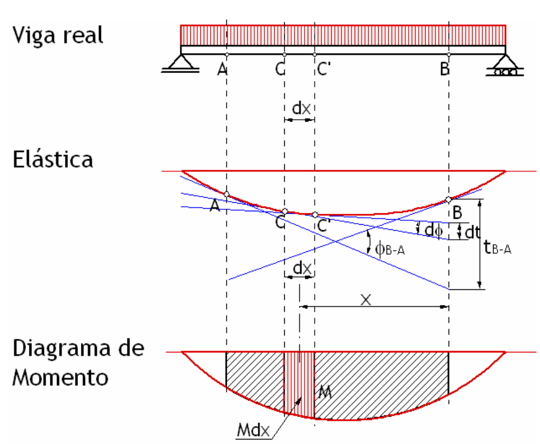
A través de ellos buscaremos determinar el ángulo de curvatura de la línea elástica y sus deflexiones o flechas. Cada método tiene ventajas o desventajas dependiendo de la viga a analizar.

3.a.-METODO DE AREA DE MOMENTOS

La deducción del capítulo anterior establece que la curvatura de la línea elástica está en función del momento flector de la viga. Si analizamos la relación de los ángulos en el siguiente gráfico tenemos que:

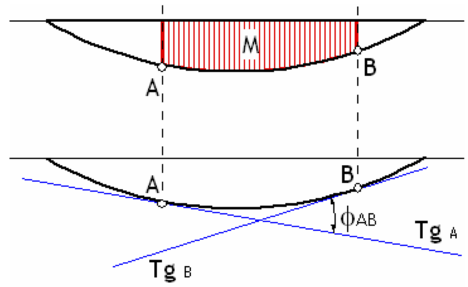


Los triángulos rectángulos OAE y OBC forman respectivamente en E y C un ángulo de 90º-dϕ, por lo tanto los triángulos rectángulo ACD y BED necesariamente debe formar en D el ángulo dϕ. De esta forma, también podemos referirnos a dϕ, como el ángulo que forman las tangentes a dos puntos de la línea elástica y establecer nuevas relaciones.



PRIMER TEOREMA DE MOHR

El ángulo entre las tangentes trazadas a la elástica en dos puntos cualquiera A y B, es igual al área de momento flector entre esos dos puntos, dividido por EI.



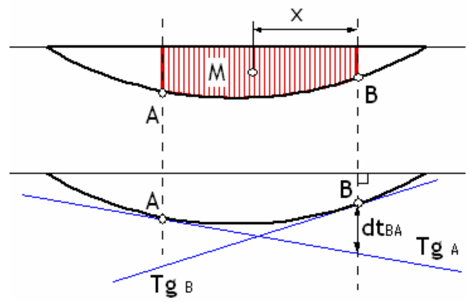
$$\phi_{AB} = \frac{1}{EI} \text{ Area entre A y B}$$

o

$$\phi_{AB} = \frac{1}{EI}\int_{A}^{B} d\phi = \frac{1}{EI}\int_{A}^{B} M dx$$

SEGUNDO TEOREMA DE MOHR

La distancia desde un punto B de la elástica de una viga, medida perpendicularmente a la posición original hasta la tangente trazada por otro punto A de la elástica, es igual al momento del área de momento flector entre los dos puntos, respecto a la ordenada que pasa por B, dividido por EI. Esta distancia la denominaremos desviación tangencial.



$dt = x\, d\phi$ (gráfico superior)

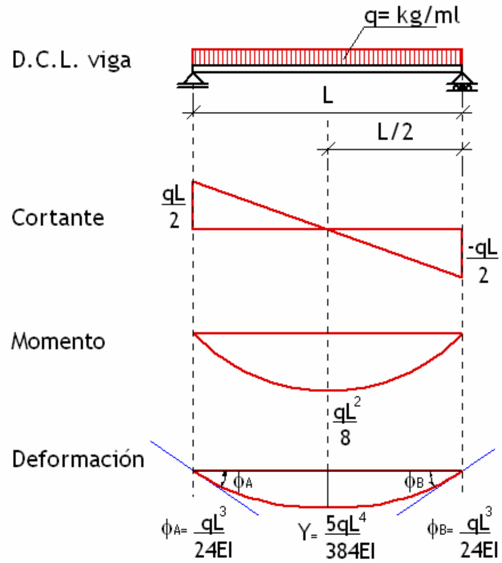
$$t_{BA} = \frac{1}{EI}\int_{B}^{A} dt = \frac{1}{EI}\int_{B}^{A} x.d\phi$$

$$t_{BA} = \frac{1}{EI}\int_{B}^{A} x.M.dx$$

$$t_{BA} = \frac{1}{EI} \text{Area}_{.AB}.x$$

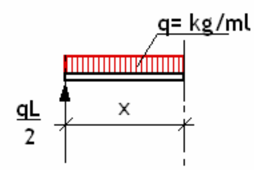
EJEMPLO:

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Establecemos el equilibrio externo de la viga.

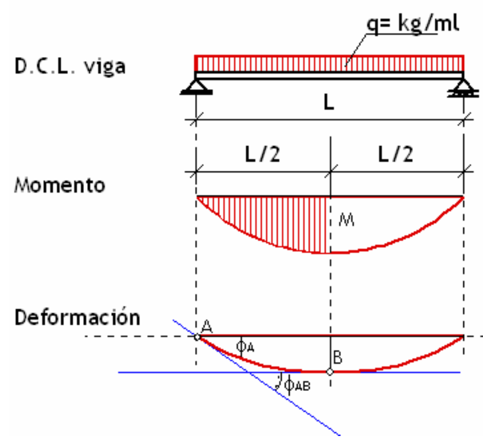
$$Ra = Rb = \frac{qL}{2}$$



Determinamos la ecuación general de momento flector de la viga.

$$Mx = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Aplicando el Primer Teorema de Mohr, podemos determinar el ángulo en el apoyo calculando el ángulo entre la tangente trazada en el extremo izquierdo de la elástica y la tangente trazada en el punto medio, siendo ésta la tangente de pendiente nula.



$$\phi_{AB} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} M dx$$

$$\phi_{AB} = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) dx$$

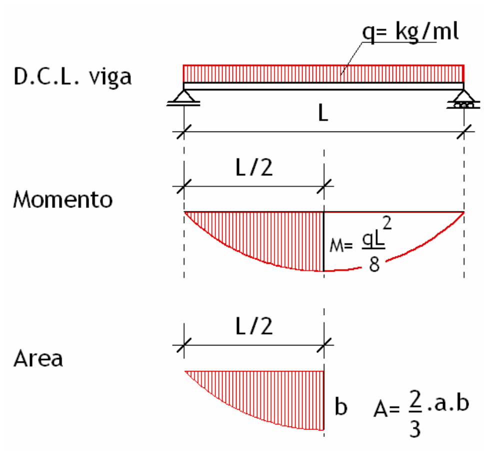
$$\phi_{AB} = \frac{1}{EI} \left[\frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right]_0^{L/2}$$

$$\phi_{AB} = \frac{qL^3}{16EI} - \frac{qL^3}{48EI}$$

$$\phi_{AB} = \phi_A$$

Siendo la viga simétrica se deduce que este valor de ángulo es también válido para el extremo derecho de ésta.

Otra forma de enfrentar el ejercicio, si conocemos el área es:

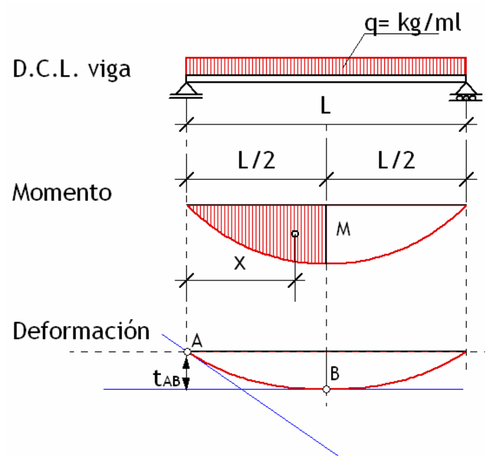


$$\phi_{AB} = \phi_A = \frac{1}{EI}\ \text{Area entre A y B}$$

$$\phi_A = \frac{1}{EI}\frac{qL^2}{8}\frac{2}{3}\frac{L}{2}$$

$$\boxed{\phi_A = \frac{qL^3}{24EI}}$$

Para obtener la flecha máxima aplicamos el segundo teorema de Mohr. Calculamos la desviación tangencial en el extremo izquierdo de la elástica con respecto a la tangente trazada en el punto de flecha máxima, que en este caso corresponde a L/2.



$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\int_A^B M.x.dx$$

$$Y_{máx} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)x.dx$$

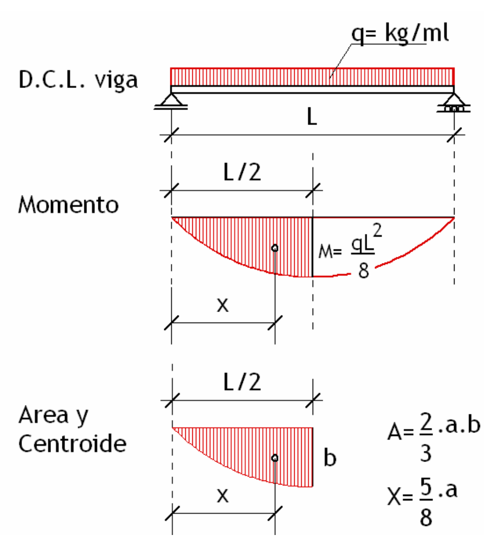
$$Y_{máx} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{qLx^2}{2} - \frac{qx^3}{2}\right)dx$$

$$Y_{máx} = \frac{1}{EI}\left[\frac{qLx^3}{6} - \frac{qx^4}{8}\right]_0^{L/2}$$

$$Y_{máx} = \frac{qL^4}{48EI} - \frac{qL^4}{128EI}$$

$$\boxed{Y_{máx} = \frac{5qL^4}{384EI}}$$

Si conocemos el área y su centroide podemos realizar la operación de la siguiente forma:



$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\ Area_{AB}\ .\ x_A$$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\frac{qL^2}{8}\frac{2}{3}\frac{L}{2}\frac{5}{8}\frac{L}{2}\ ?$$

$$\boxed{Y_{máx} = \frac{5qL^4}{384EI}}$$

3.b.- METODO DE DOBLE INTEGRACION

De la deducción del Primer Teorema Mohr se obtuvo la expresión:

$$d\phi = \frac{1}{EI} M.dx \qquad /:dx$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{EI}$$

La derivada en cualquier punto de la una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

$$\frac{dy}{dx} = Tg\phi$$

Como ? es $d\phi \quad \Rightarrow \quad Tg\ \phi \approx \phi$

$$\approx \phi = \frac{dy}{dx}$$

Reemplazando en la ecuación inicial obtenemos la **Ecuación Diferencial de la Elástica de una viga**

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{M}{EI}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

Integrando obtenemos la **Ecuación General de Pendiente**.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\int Mdx + C_1}$$

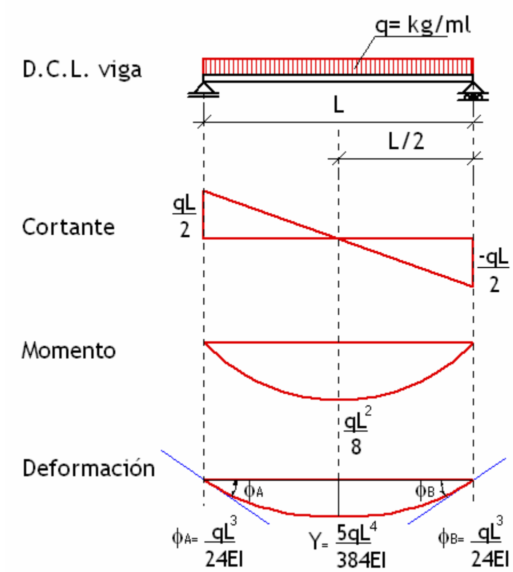
Integrando nuevamente obtenemos la **Ecuación General de Flecha**.

$$\boxed{y = \frac{1}{EI}\iint Mdx + C_1 + C_2}$$

Este método nos permite calcular las pendientes y deflexiones de la viga en cualquier punto. La dificultad radica en despejar las constantes de integración. Esto se logra analizando las condiciones de apoyo y la deformación de la viga

EJEMPLO:

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



La ecuación diferencial de la elástica de una viga está dada por la expresión:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI} \qquad \text{o} \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2}=M$$

El valor de momento varía en función de X de acuerdo a la ecuación general antes establecida:

$$Mx=\frac{qLx}{2}-\frac{qx^2}{2}$$

Entonces la ecuación diferencial de la elástica para esta viga es:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{qLx}{2}-\frac{qx^2}{2}$$

Integrando obtenemos la ecuación de pendiente para cualquier punto de la elástica.

$$EI\frac{dy}{dx}=\int\frac{qLx}{2}-\frac{qx^2}{2}$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{qLx^2}{4}-\frac{qx^3}{6}+C_1$$

Por simetría, la flecha máxima está en el punto medio de la viga, por lo que la tangente trazada en este punto de la elástica es de pendiente nula, es decir,

si: X = L/2 $\qquad \frac{dy}{dx}=0$

Por lo tanto:

$$0 = \frac{qL}{4}\frac{L^2}{4} - \frac{q}{6}\frac{L^3}{8} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

Entonces la ecuación general de la pendiente es:

$$\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

La ecuación de flecha la obtenemos integrando la ecuación de anterior:

$$EI.y = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24} + C_2$$

Según las condiciones de apoyo, la flecha es nula cuando X = 0 o X = L

Si X=0 $\quad 0 = C_2$

Si X=L $\quad 0 = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24} + C_2$

Por lo tanto $C_2 = 0$

Entonces la ecuación general de flecha es:

$$y = \frac{qLx^3}{12EI} - \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qL^3x}{24EI}$$

Los ángulos en los apoyos se obtiene reemplazando X=0 y X=L en la ecuación correspondiente

$$\phi A = -\frac{qL^3}{24EI}$$

$$\phi B = \frac{qL^3}{24\,EI}$$

y la flecha máxima reemplazando en X = L/2.

$$Y_{máx} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

3.c.- METODO DE VIGA CONJUGADA

Este método se basa en los mismos principios del método de área de momento, pero difiere en su aplicación. Consiste en generar, una nueva viga ficticia de la misma longitud, y con las mismas condiciones de apoyo que la viga original, pero cargada con el diagrama del momento flector de la viga original dividido por EI. De esta manera, el ángulo de la tangente trazada en cualquier punto de la elástica de la viga real está dada por el cortante (Q') de la nueva viga, y la flecha se determina calculando el momento flector (M') de esa viga ficticia

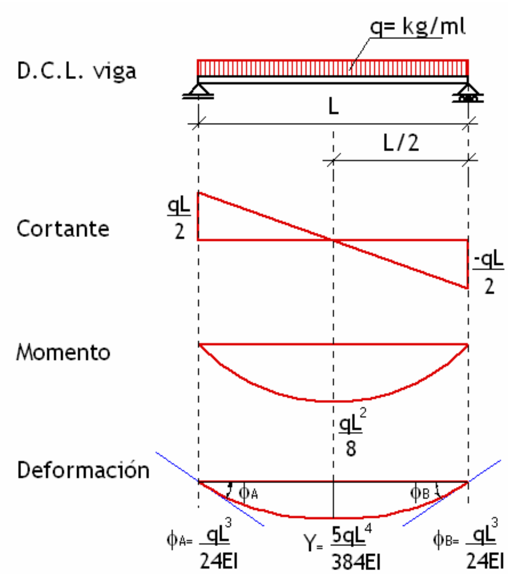
Según lo anterior, podemos establecer las siguientes equivalencias:

VIGA REAL	VIGA FICTICIA.
momento M	carga M/EI
ángulo ϕ	cortante Q'
flecha Y	momento M'

Podemos afirmar que existe una analogía entre las relaciones carga - cortante - momento - y momento - pendiente - flecha.

EJEMPLO

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Para la aplicación del método es necesario determinar el gráfico de momento flector y sus valores característicos.

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8}$$

Para obtener los valores de ángulo y flecha generamos una viga ficticia o conjugada.

VIGA FICTICIA

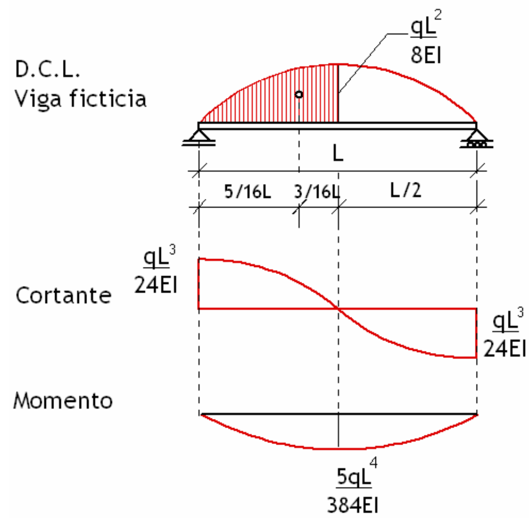
Generamos una viga y le aplicamos como carga el momento flector de la viga dada dividido por EI

$$q' = \frac{Mmáx}{EI} = \frac{qL^2}{8EI}$$

El cortante de la viga ficticia corresponde a la pendiente que adquiere la tangente trazada a la curva elástica de la viga real, por lo que el gráfico de cortante de la viga ficticia representa los cambios en la pendiente. El ángulo en el punto de apoyo de la viga original equivale a la reacción de la viga conjugada.

$$\phi A = Ra' = \frac{qL^2}{8EI}\frac{2}{3}\frac{L}{2}$$

$$\phi A = \frac{qL^3}{24EI}$$



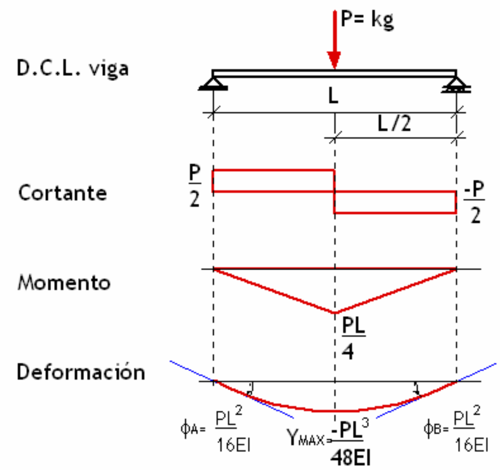
El momento flector de la viga ficticia corresponde al descenso de la viga real al deformarse. En este caso, el gráfico de momento de la viga ficticia representará los valores de deformación de la viga real. Como el descenso máximo de la viga es en L/2, determinamos el momento máximo de la viga ficticia en ese punto.

$$Y_{MAX} = M'_{MAX} = \frac{qL^3}{24EI}\frac{L}{2} - \frac{qL^2}{8EI}\frac{2}{3}\frac{L}{2}\frac{3}{8}\frac{L}{2}$$

$$Y_{MAX} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

III. APLICACIÓN.

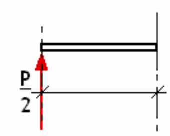
1.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA PUNTUAL APLICADA EN L/2.



1.a.- POR MÉTODO DE AREA DE MOMENTOS

Establecemos el equilibrio externo.

$$R_A = R_B = \frac{P}{2}$$



Determinamos la ecuación general de momento flector.

$$Mx = \frac{Px}{2}$$

Por simetría de la viga, deducimos que la pendiente de la tangente trazada en el punto medio de la curva elástica es nula. Para la aplicación de los Teoremas de Mohr, debemos considerar la tangente trazada en el extremo izquierdo de la elástica y la tangente trazada en el punto medio de ésta.

Para determinar los valores de ángulo en los apoyos calculamos el ángulo entre las dos tangentes

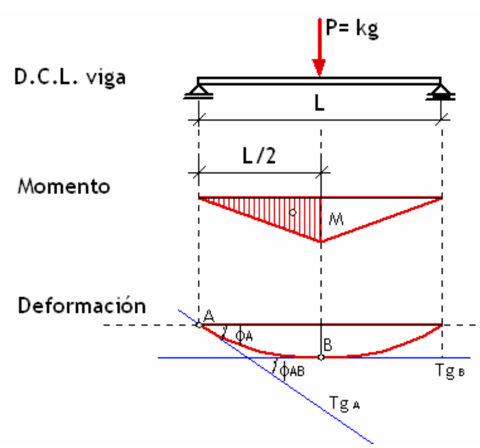
$$\phi_{AB} = \frac{1}{EI}\int_A^B M dx$$

$$\phi_{AB} = \phi_A$$

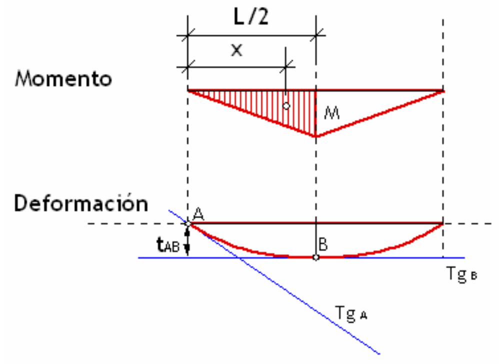
$$\phi_A = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{Px}{2}\right).dx$$

$$\phi_A = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^2}{4}\right]_0^{L/2}$$

$$\boxed{\phi_A = \frac{PL^2}{16EI}}$$



y la flecha máxima la obtenemos calculando la desviación tangencial en el extremo izquierdo con respecto a la tangente trazada por el punto medio de la curva elástica.



$$Ymáx = \frac{1}{EI}\int_A^B M.x.dx$$

$$Ymáx = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{Px}{2}\right)x.dx$$

$$Ymáx = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^3}{6}\right]_0^{L/2}$$

$$\boxed{Ymáx = \frac{PL^3}{48EI}}$$

1.b.- POR MÉTODO DOBLE INTEGRACIÓN.

Como la viga es simétrica analizamos sólo el primer tramo. Con la ecuación general de momento, establecemos la ecuación diferencial de la elástica.

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{2}$$

Integrando dos veces la ecuación obtenemos:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4} + C_1$$

$$EI.y = \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2$$

Según la deformación de la viga, la pendiente de la tangente trazada en el centro de la viga es nula, es decir:

Si $X = L/2$ $\quad \frac{dy}{dx} = 0$

$$0 = \frac{P}{4}\frac{L^2}{4} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{PL^2}{16}$$

Entonces la **ecuación general de ángulo** es:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16}$$

Según las condiciones de apoyo, la flecha es nula en el apoyo de la viga, es decir cuando X = 0

Por lo tanto $C_2 = 0$

Entonces la **ecuación general de flecha** es

$$EI.y = \frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2x}{16}$$

El ángulo en el apoyo se obtiene reemplazando X=0 en la ecuación correspondiente

$$\phi A = \frac{PL^2}{16EI}$$

Y la flecha máxima reemplazando en X = L/2.

$$Ymáx = \frac{Pl^3}{48.EI}$$

1.c.- POR MÉTODO DE VIGA CONJUGADA.

VIGA REAL

Determinamos el gráfico de momento flector y sus valores característicos

$$M_{máx} = \frac{PL}{4}$$

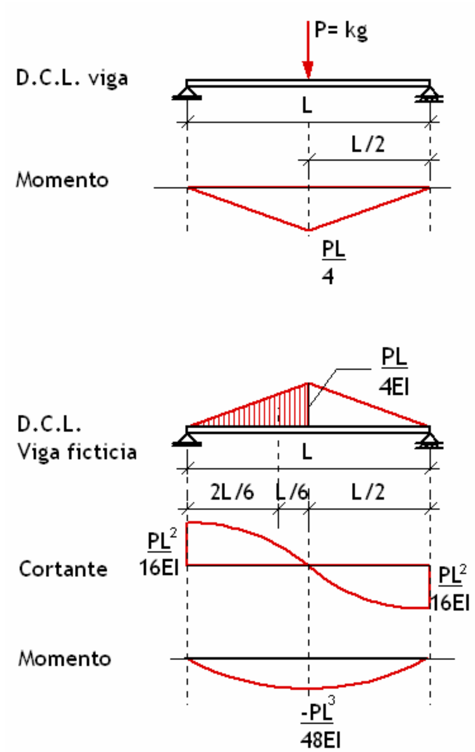
Generamos una viga ficticia y le aplicamos como carga el momento flector de la viga dada dividido por EI. Y le determinamos las reacciones y el momento máximo, valores correspondientes a los ángulos en los apoyos y al descenso máximo de la viga dada.

VIGA FICTICIA

$$Mmáx = q' = \frac{PL}{4EI}$$

$$\phi A = Ra' = \frac{PL}{4EI}\frac{L}{2}\frac{1}{L} = \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\phi A = \frac{PL^2}{16EI}$$

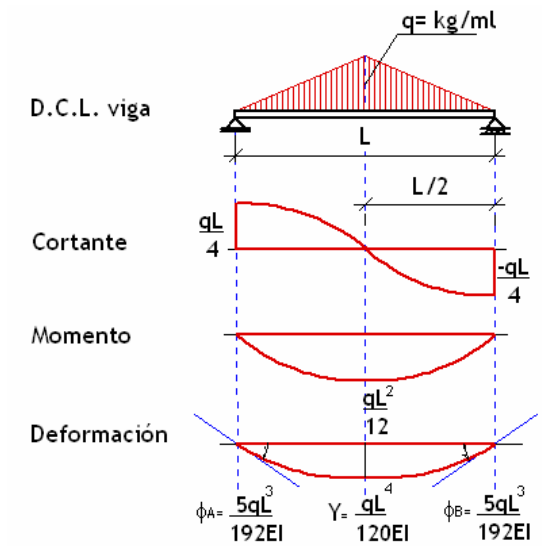


Este valor de ángulo es válido también para el otro extremo, porque la viga es simétrica. Y por la misma condición, el momento máximo se produce cuando X=L/2

$$Ymáx = Mmáx = \frac{PL^2}{16EI}\frac{L}{2} - \frac{PL}{4EI}\frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{1}{3}\frac{L}{2}$$

$$Ymáx = \frac{PL^3}{48EI}$$

2.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA TRIANGULAR

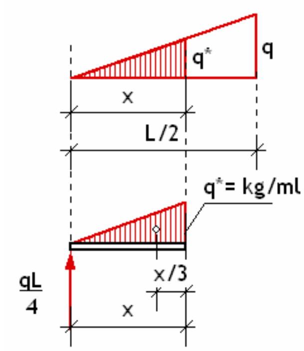


2.a.- POR MÉTODO DE AREA DE MOMENTO

Establecemos el equilibrio externo.

$$R_A = R_B = \frac{qL}{4}$$

Determinamos la ecuación general de momento flector.



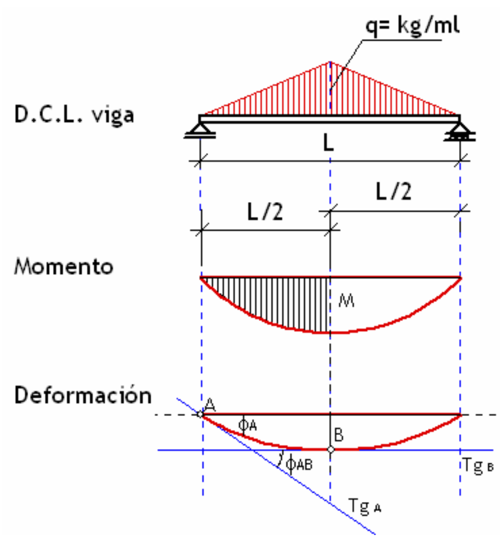
$$\frac{q^*}{x} = \frac{q}{L/2}$$

$$q^* = \frac{2qx}{L}$$

$$Mx = \frac{qLx}{4} - \frac{2qx}{L}\frac{x}{3}\frac{x}{2}$$

$$Mx = \frac{qLx}{4} - \frac{qx^3}{3L}$$

Como la viga es simétrica, la tangente trazada por el punto medio de la elástica es de pendiente nula. Para determinar el ángulo en el apoyo calculamos el ángulo entre la tangente trazada en el extremo y la tangente trazada en L/2.



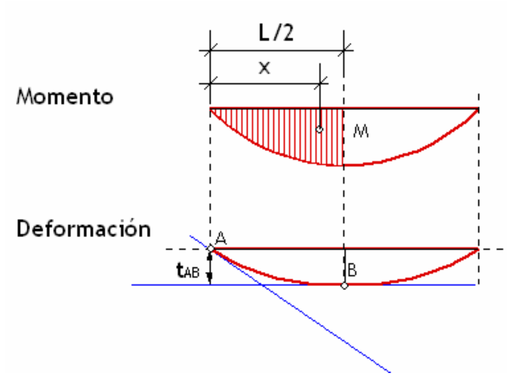
$$\phi_{AB} = \phi_A = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{qLx}{4} - \frac{qx^3}{3L}\right)dx$$

$$\phi_A = \frac{1}{EI}\left[\frac{qLx^2}{8} - \frac{qx^4}{12L}\right]_0^{L/2}$$

$$\phi_A = \frac{qL^3}{32EI} - \frac{qL^3}{192EI}$$

$$\boxed{\phi_A = \frac{5qL^3}{192EI}}$$

Para determinar la flecha máxima se calcula la desviación tangencial en el extremo de la viga con respecto a la tangente trazada en L/2.



$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{qLx}{4} - \frac{qx^3}{3L}\right)x.dx$$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(\frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^4}{3L}\right)dx$$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}\left[\frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^5}{15L}\right]_0^{L/2}$$

$$t_{AB} = \frac{qL^4}{96EI} - \frac{qL^4}{480EI}$$

$$Y_{MAX} = \frac{qL^4}{120EI}$$

2.b.- POR METODO DE DOBLE INTEGRACION

La viga es simétrica por lo tanto se puede analizar un sólo tramo. Con la ecuación general de momento flector establecemos la ecuación diferencial de la elástica para el primer tramo.

$$Mx = \frac{qLx}{4} - \frac{qx^3}{3L}$$

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qLx}{4} - \frac{qx^3}{3L}$$

Integrando la ecuación dos veces obtenemos:

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{8} - \frac{qx^4}{12L} + C_1$$

$$EI.y = \frac{qLx^3}{24} - \frac{qx^5}{60L} + C_1x + C_2$$

Según la deformación de la viga, la pendiente es nula cuando X = L/2

$$0 = \frac{qL}{8}\frac{L^2}{4} - \frac{q}{12.L}\frac{L^4}{16} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{5qL^3}{192}$$

Según las condiciones de apoyo, la flecha es nula cuando X = 0

Por lo tanto $C_2 = 0$

Reemplazando C_1 y C_2 en las ecuaciones anteriores obtenemos:

Ecuación general de ángulo:

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{8} - \frac{qx^4}{12L} - \frac{5qL^3}{192}$$

Ecuación general de flecha:

$$EI.y = \frac{qLx^3}{24} - \frac{qx^5}{60L} + \frac{5qL^3x}{192}$$

Determinamos el ángulo en los apoyos reemplazando X=0 en la ecuación correspondiente

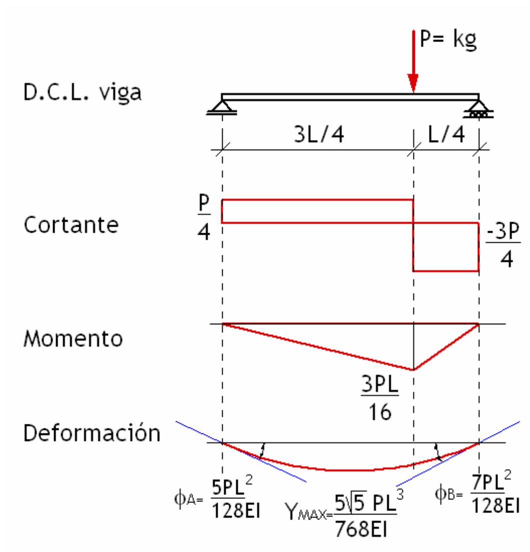
$$\phi_A = -\frac{5qL^3}{192EI}$$

Siendo simétrica la viga, este valor también es válido para el otro extremo de la viga.

Y la flecha máxima reemplazando en X = L/2.

$$Y_{MAX} = -\frac{qL^4}{120EI}$$

3.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON CARGA PUNTUAL APLICADA EN 3L/4

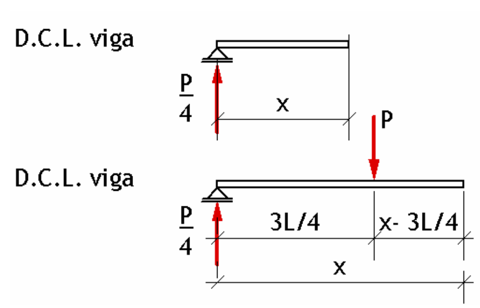


3.a.- POR MÉTODO DE ÁREA DE MOMENTOS.

Establecemos el equilibrio externo determinando las reacciones en los apoyos.

$$Ra = \frac{P}{4} \qquad Rb = \frac{3P}{4}$$

Determinamos las ecuaciones de momento flector para los dos tramos:
de 0 a 3L/4 y de 3L/4 a L



$$Mx_{T1} = \frac{Px}{4}$$

$$Mx_{T2} = \frac{3PL}{4} - \frac{3Px}{4}$$

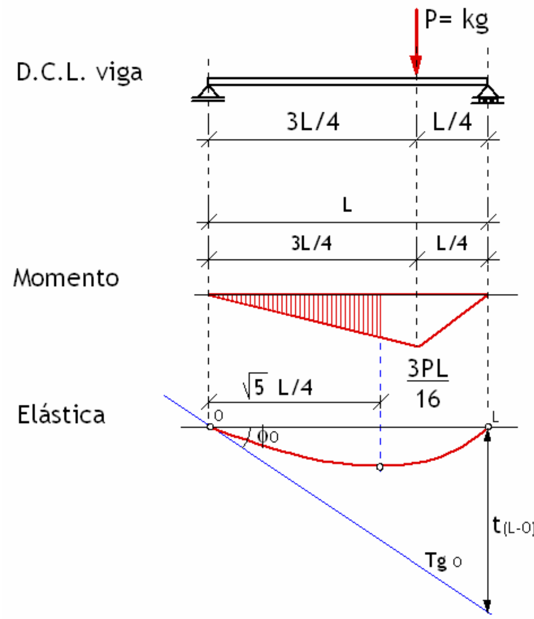
$$M_{MAX} = \frac{3PL}{16}$$

En una viga asimétrica la curva elástica no es simétrica con respecto a su centro, lo que produce una mayor dificultad para determinar el punto cuya tangente sea de pendiente nula. Para determinar los ángulos en los apoyos y la flecha máxima, debemos recordar algunos supuestos iniciales:

El arco es el producto entre un ángulo y un radio. La deformación que se produce en una viga es muy pequeña en comparación con la longitud de ella; por lo tanto el ángulo que se genera es también reducido. De forma que, no existe gran diferencia entre un arco y su proyección vertical (desviación tangencial).

Arco = ángulo x radio ≈ t = ángulo x largo

Entonces para calcular los ángulos en los apoyos debemos calcular primero la desviación tangencial en un extremo de la viga con respecto a la tangente trazada en el otro extremo



$$t_{(L-0)} = \frac{1}{EI}\left[\frac{3PL}{16}\,\frac{3L}{4}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\,\frac{3L}{4}+\frac{L}{4}\right)+\frac{3PL}{16}\,\frac{L}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{L}{4}\right]$$

$$t_{(L-0)} = \frac{5PL^3}{128EI}$$

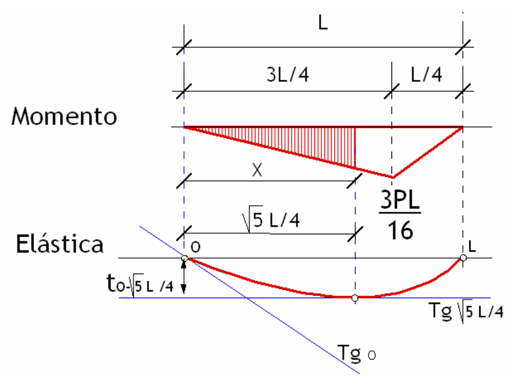
Como t = ángulo x largo se deduce que ángulo (ϕ)= t/largo

$$t_{(L-0)} = \phi_0 . L$$

$$t_{(L-0)} = \phi_0 = \frac{5PL^3}{128EI}\,\frac{1}{L}$$

$$\phi_0 = \frac{5PL^2}{128EI}$$

Para determinar el valor de la flecha máxima, necesitamos saber su ubicación. El ángulo corresponde a un área de momento dividido por EI. Ahora que conocemos el valor de esa área de momento (ϕ_0) podemos obtener su extensión.



$$\phi_0 = \frac{5PL^2}{128EI} = \frac{Px}{4EI}\,\frac{x}{2}$$

$$x^2 = \frac{40L^2}{128}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}.L}{4}$$

Para determinar la flecha máxima calculamos la desviación tangencial en 0, con respecto a la tangente trazada a la elástica en X=√5L/4

$$t_{(0-\sqrt{5}.L/4)} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Px}{4}\,\frac{x}{2}\,\frac{2}{3}x\right) = \frac{Px^3}{12EI}$$

$$t_{(0-\sqrt{5}.L/4)} = \frac{5\sqrt{5}.PL^3}{768EI}$$

3.b.- POR MÉTODO DE DOBLE INTEGRACIÓN.

Con las ecuaciones generales de momento establecemos las ecuaciones diferenciales para ambos tramos, integrándola dos veces obtenemos:

TRAMO 1 (0-3L/4)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Px}{4}$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{Px^2}{8}+C_1$$

$$EI.y=\frac{Px^3}{24}+C_1x+C_2$$

TRAMO 2 (3L/4-L)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3PL}{4}-\frac{3Px}{4}$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{3PLx}{4}-\frac{3Px^2}{8}+C_3$$

$$EI.y=\frac{3PLx^2}{8}-\frac{3Px^3}{24}+C_3x+C_4$$

Según las condiciones de apoyo
La flecha es nula cuando X = 0 para el primer tramo

$$C_2 = 0$$

La flecha es nula cuando X = L para el segundo tramo

$$EI.0=\frac{3PL^3}{8}-\frac{3PL^3}{24}+C_3.L+C_4$$

$$C_4=-\frac{PL^3}{4}-C_3.L$$

Según la deformación de la viga la pendiente es única para ambos tramos cuando X=3L/4. Entonces igualamos las ecuaciones de pendiente de ambos tramos en 3L/4

$$\frac{Px^2}{8}+C_1=\frac{3PLx}{4}-\frac{3Px^2}{8}+C_3$$

$$\frac{3PL^2}{128}+C_1=\frac{9PL^2}{16}-\frac{27PL^2}{128}+C_3$$

$$C_1=\frac{36PL^2}{128}+C_3$$

Del mismo modo igualamos las ecuaciones de flecha de ambos tramos en 3L/4

$$\frac{27PL^3}{1536}+\frac{108PL^3}{512}+C_3\frac{3L}{4}=\frac{27PL^3}{128}-\frac{81PL^3}{1536}+C_3\frac{3L}{4}-C_3\frac{PL^4}{4}-C_3L$$

$$C_3=-\frac{41PL^2}{128}$$

Reemplazamos C_3 en las ecuaciones anteriormente obtenidas.

$$C_1=\frac{36PL^2}{128}-\frac{41PL^2}{128}=-\frac{5PL^2}{128}$$

$$C_4=-\frac{PL^3}{4}+\frac{41PL^3}{128}=\frac{9PL^3}{128}$$

Entonces las ecuaciones generales de ángulo y flecha son:

TRAMO 1

Ecuación de pendiente válida para $0 \le X \le 3L/4$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{Px^2}{8}-\frac{5PL^2}{128}$$

Ecuación de flecha válida para $0 \le X \le 3L/4$

$$EI.y=\frac{Px^3}{24}-\frac{5PL^2x}{128}$$

TRAMO 2

Ecuación de pendiente válida para $3L/4 \le X \le L$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{3PLx}{4}-\frac{3Px^2}{8}-\frac{41PL^2}{128}$$

Ecuación de flecha válida para $3L/4 \le X \le L$

$$EI.y=\frac{3PLx^2}{8}-\frac{3Px^3}{24}-\frac{41PL^2x}{128}+\frac{9PL^3}{128}$$

Para determinar la ubicación de la flecha máxima en la viga es necesario considerar que la flecha es máxima cuando el ángulo es nulo, para lo cual igualamos la ecuación de ángulo del primer tramo a cero.

$$0 = \frac{Px^2}{8} - \frac{5PL^2}{128}$$

$$x^2 = \frac{40L^2}{128} \qquad x = \frac{\sqrt{5}.L}{4}$$

Los ángulos en los apoyos se obtiene reemplazando X=0 o X=L en la ecuación correspondiente

$$\phi_A = \frac{5PL^2}{128\ EI}$$

$$\phi_B = \frac{7PL^2}{128\ EI}$$

Y la flecha máxima reemplazando en X = √5L/4

$$Ymáx = \frac{5\sqrt{5}.PL^3}{768.EI}$$

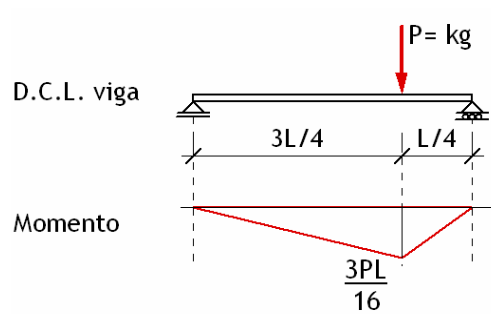
3.c.- POR MÉTODO DE VIGA CONJUGADA

Con el gráfico del momento flector y sus valores característicos generamos la viga ficticia.

$$Mx_{T1} = \frac{Px}{4}$$

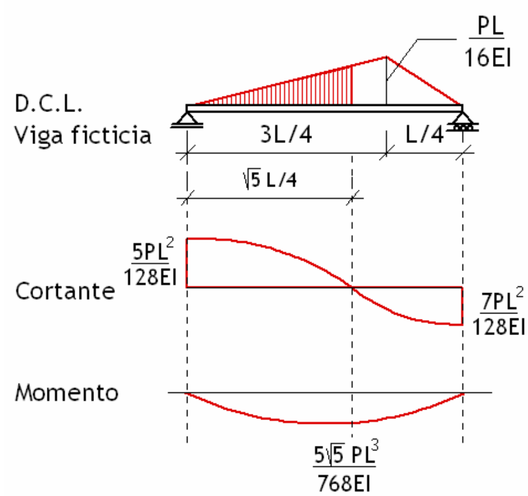
$$Mx_{T2} = \frac{3PL}{4} - \frac{3Px}{4}$$

$$M_{MAX} = \frac{3PL}{16}$$



A la viga ficticia le aplicamos como carga el momento flector de la viga dada dividido por EI. Se determinan los ángulos en los apoyos y el descenso máximo de la viga dada, calculando las reacciones en los apoyos y el momento máximo de la viga ficticia.

VIGA FICTICIA



$$q' = M\max = \frac{3PL}{16EI}$$

? A= Ra' ? B= Rb'

ΣMa=0

$$Rb'.L = \frac{3PL}{16EI}\frac{3L}{4}\frac{1}{2}\frac{3L}{4}\frac{2}{3} + \frac{3PL}{16EI}\frac{L}{4}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{L}{4} + \frac{3L}{4}\right) = \frac{84PL^3}{1536EI}$$

$$R_B' = \phi B = \frac{7PL^2}{128EI}$$

ΣFy=0

$$Ra' = \frac{7PL^2}{128EI} - \frac{3PL}{16EI}\frac{1}{2}\frac{3L}{4} - \frac{3PL}{16EI}\frac{L}{4}\frac{1}{2}$$

$$R_A = \phi A = \frac{5PL^2}{128EI}$$

Donde Qx=0 el momento es máximo

$$0 = \frac{5PL^2}{128EI} - \frac{3PL}{16EI}\frac{4x}{3L}\frac{x}{2}$$

$$x = \frac{480L^2}{1536}$$

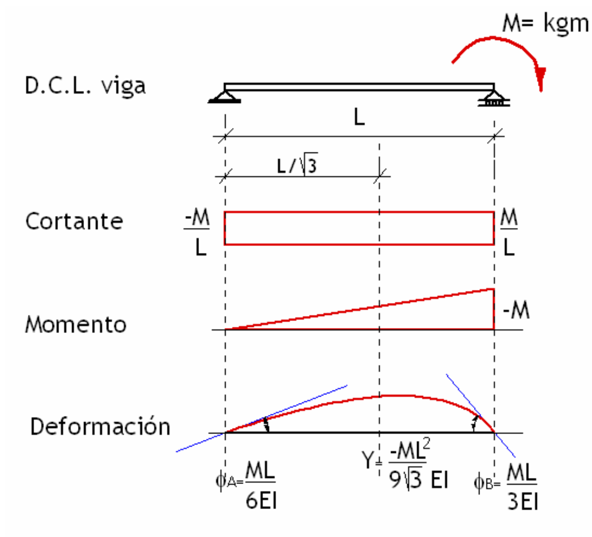
$$x = \frac{\sqrt{5}.L}{4} = 0,559L$$

$Y_{max} = M'_{max}$

$$Y_{máx} = \frac{5PL^2}{128EI}\frac{\sqrt{5}.L}{4} - \frac{3PL}{16EI}\frac{4}{3L}\frac{\sqrt{5}.L}{4}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}.L}{4}\frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}.L}{4} = \frac{10\sqrt{5}.PL^3}{1536EI}$$

$$Y_{máx} = \frac{5\sqrt{5}.PL^3}{768EI}$$

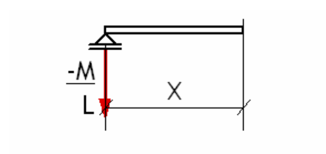
4.- VIGA SIMPLEMENTE APOYADA CON UN MOMENTO APLICADO EN EL EXTREMO



4.a- POR MÉTODO DE ÁREA DE MOMENTO.

Establecemos el equilibrio externo y determinamos la ecuación general de momento flector.

$$Ra = \frac{M}{L} \qquad Rb = -\frac{M}{L}$$



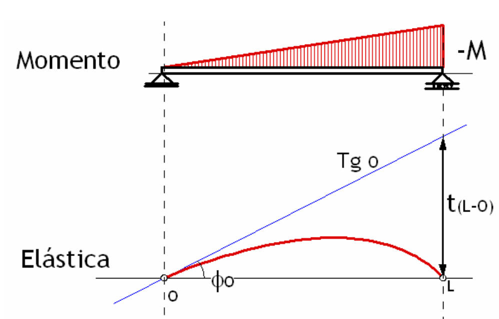
$$Mx = -\frac{Mx}{L}$$

Para calcular los ángulos en los apoyos en esta viga asimétrica, debemos calcular primero la desviación tangencial en un extremo de la viga con respecto a la tangente trazada en el otro extremo.

Analizando la desviación tangencial en el punto L determinamos el ángulo en 0

$$t_{(L-0)} = \frac{1}{EI}\left[\frac{ML}{2}\frac{L}{3}\right]$$

$$t_{(L-0)} = \frac{ML^2}{6EI}$$



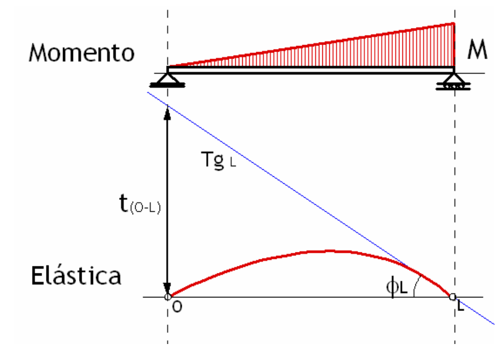
Luego si t = ángulo x largo se deduce que

ángulo = t / largo

$$\phi_0 = \frac{ML^2}{6EI}\frac{1}{L}$$

$$\boxed{\phi_0 = \frac{ML}{6EI}}$$

Analizando la desviación tangencial en el punto 0 determinamos el ángulo en L



$$t_{(L-0)} = \frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{ML}{2}\frac{2L}{3}\right]$$

$$t_{(L-0)} = \frac{ML^2}{3EI}$$

$$\phi_L = \frac{ML^2}{3EI}\frac{1}{L}$$

$$\boxed{\phi_L = \frac{ML}{3EI}}$$

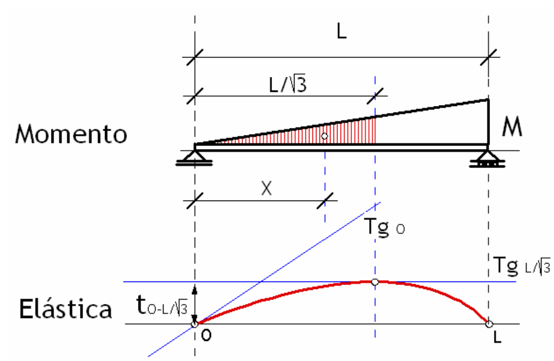
Para determinar la ubicación del punto en donde la flecha es máxima aplicamos el Primer Teorema de Mohr.

$$\phi_A = \frac{ML}{6EI} = \frac{Mx}{L.EI}\frac{x}{2}$$

$$\frac{ML}{6EI} = \frac{Mx^2}{2LEI}$$

$$x^2 = \frac{L^2}{3} \qquad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Para determinar la flecha máxima calculamos la desviación tangencial desde el punto 0 con respecto a la tangente trazada por L/√3



$$t_{(0-L/\sqrt{3})} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/\sqrt{3}} \frac{Mx}{L}x.dx$$

$$t_{(0-L/\sqrt{3})} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/\sqrt{3}} \frac{Mx^2}{L}$$

$$t_{(0-L/\sqrt{3})} = \frac{1}{EI}\left[\frac{Mx^3}{3L}\right]_0^{L/\sqrt{3}}$$

$$t_{(0-L/\sqrt{3})} = \frac{1}{EI}\frac{M}{3L}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}.EI}$$

$$\boxed{Y_{máx} = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}.EI}}$$

4-b- POR MÉTODO DE DOBLE INTEGRACION.

Con la ecuación general de momento flector establecemos la ecuación diferencial de la elástica.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Mx}{L}$$

Integrando la ecuación diferencial dos veces obtenemos:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Mx^2}{2L} + C_1$$

$$EI.y = -\frac{Mx^3}{6L} + C_1x + C_2$$

Según las condiciones de apoyo, la flecha es nula cuando X = 0 y X = L

Si X=0 $\quad 0 = C_2$

Si X=L $\quad 0 = -\frac{ML^2}{6} + C_1L + C_2$

$$C_1 = -\frac{ML}{6}$$

Reemplazando los valores de C_1 y C_2 en las ecuaciones correspondientes podemos determinar la ecuación general de pendiente.

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Mx^2}{2L} + \frac{ML}{6}$$

y la ecuación general de flecha.

$$EI.y = -\frac{Mx^3}{6L} + \frac{MLx}{6}$$

Los ángulos en los apoyos los obtenemos reemplazando X=0 y X=L en la ecuación de pendiente

$$\phi_A = \frac{ML}{6EI}$$

$$\phi_B = -\frac{ML}{3EI}$$

Para determinar la ubicación del punto en donde la flecha es máxima igualamos la ecuación general de ángulo a cero.

$$0 = -\frac{Mx^2}{2L} + \frac{ML}{6}$$

$$x^2 = \frac{L^2}{3} \qquad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Determinamos la flecha máxima reemplazando la ecuación general de flecha en X = L/√3

$$Y_{MAX} = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}.EI}$$

4.c.- POR MÉTODO DE VIGA CONJUGADA

Con el gráfico del momento flector y sus valores característicos generamos la viga ficticia.

$$Mx = -\frac{Mx}{L}$$

A la viga ficticia le aplicamos como carga el momento flector de la viga dada dividido por EI y calculando las reacciones en los apoyos y el momento máximo de la viga ficticia determinamos los ángulos en los apoyos y el descenso máximo de la viga dada

$$q' = \frac{M_{max}}{EI} = \frac{M}{EI}$$

$$\phi_A = Ra' = \left(\frac{M}{EI}\frac{L}{2}\frac{L}{3}\right)/L = \frac{ML}{6EI}$$

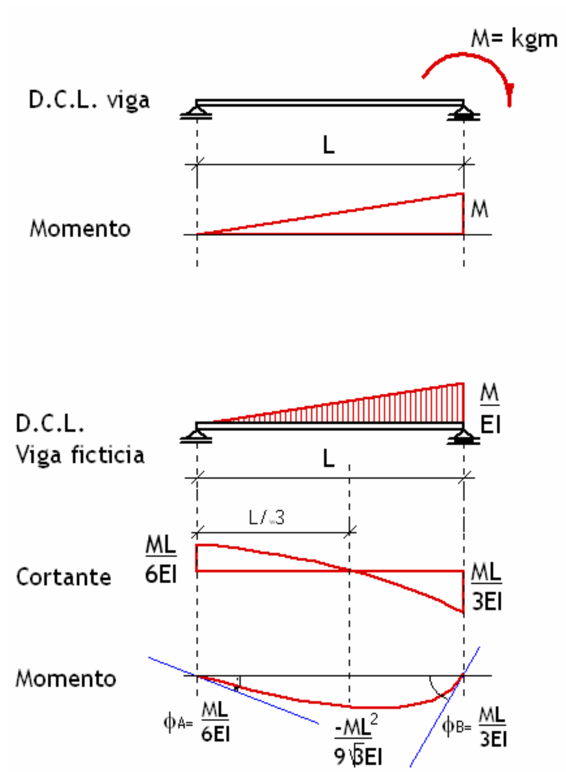
$$\phi_A = \frac{ML}{6EI}$$

$$\phi_B = Rb' = \left(\frac{M}{EI}\frac{L}{2}\frac{2L}{3}\right)/L = \frac{ML}{3EI}$$

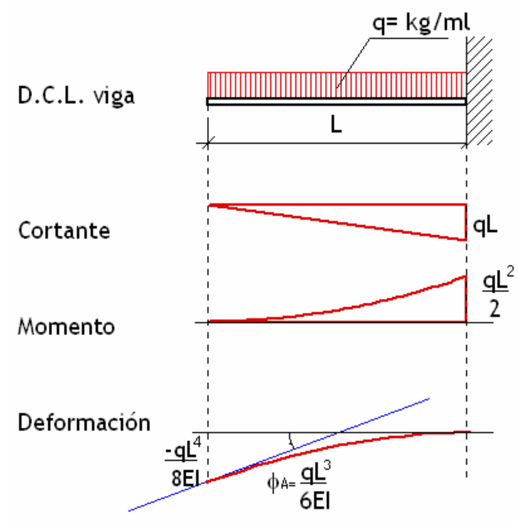
$$\phi_B = \frac{ML}{3EI}$$

$$Y_{max} = M_{max}' = \frac{ML}{6EI}\frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{M}{6LEI}\frac{L}{2\sqrt{3}}\frac{L^3}{3\sqrt{3}} = \frac{PL^2}{9\sqrt{3}.EI}$$

$$Y_{max} = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}.EI}$$



5.- VIGA EN VOLADIZO CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



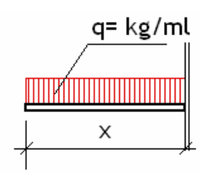
5.a.- POR MÉTODO DE ÁREA DE MOMENTO

Establecemos el equilibrio externo.

$$Ra = qL$$

Determinamos la ecuación general de momento flector

$$Mx = -\frac{qx^2}{2}$$



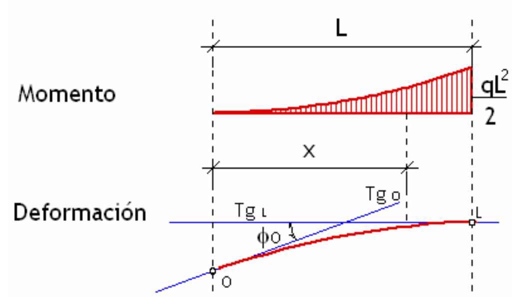
El ángulo entre las tangente trazadas en ambos extremos de la viga lo obtenemos aplicando el Primer Teorema de Mohr.

$$\phi_{OL} = -\frac{1}{EI}\int_0^L \frac{qx^2}{2}dx$$

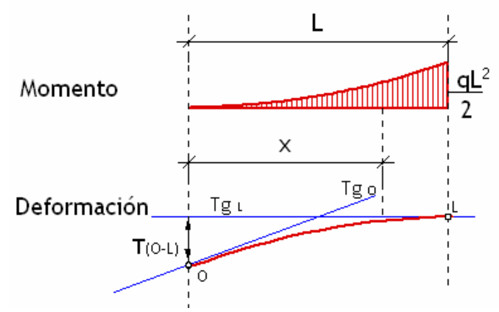
$$\phi_{OL} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6}\right]_0^L$$

$$\phi_{OL} = -\frac{qL^3}{6EI}$$

$$\boxed{\phi_A = \phi_{OL} = -\frac{qL^3}{6EI}}$$



Calculando la desviación tangencial en 0 (extremo libre de la viga) con respecto a la tangente trazada en el otro extremo, determinamos la flecha máxima.



$$t_{(O-L)} = -\frac{1}{EI}\int_0^L \frac{qx^2}{2}.x.dx$$

$$t_{(O-L)} = -\frac{1}{EI}\int_0^L \frac{qx^3}{2}dx$$

$$t_{(O-L)} = -\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{8}\right]_0^L$$

$$t_{(O-L)} = -\frac{qL^4}{8EI}$$

$$Y_{max} = t_{(O-L)} = -\frac{qL^4}{8EI}$$

5.b- POR MÉTODO DE DOBLE INTEGRACION

Con la ecuación general de momento flector establecemos la ecuación diferencial de la elástica.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2}$$

Integrando la ecuación diferencial dos veces se obtiene:

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI.y = -\frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

Según la deformación de la viga, la pendiente es nula cuando X = L

$$C_1 = \frac{qL^3}{6}$$

Según las condiciones de apoyo, la flecha es nula cuando X = L

$$C_2 = -\frac{qL^4}{8}$$

Reemplazando C_1 y C_2 en las ecuaciones anteriores se obtiene:

Ecuación general de pendiente.

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{qx^3}{6} + \frac{qL^3}{6}$$

Ecuación general de flecha.

$$EIy = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qL^3x}{6} - \frac{qL^4}{8}$$

El valor máximo de ángulo se obtiene reemplazando X=0 en la ecuación correspondiente

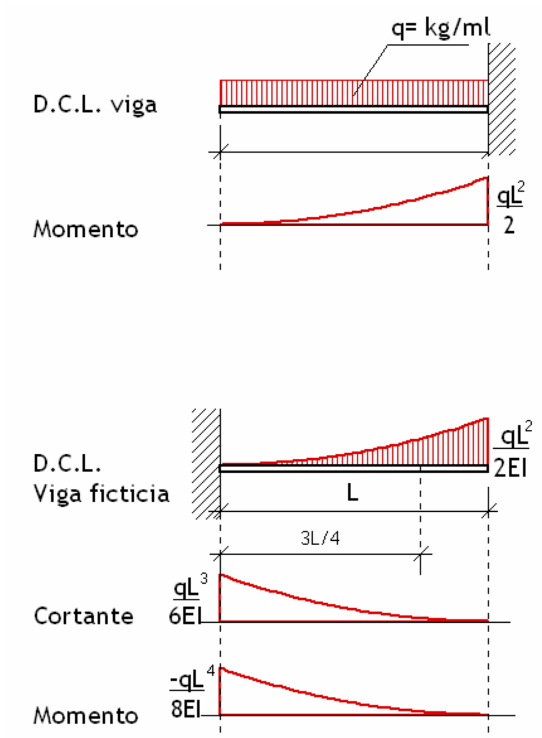
$$\phi_A = \frac{qL^3}{6EI}$$

Y la flecha máxima reemplazando en X = 0.

$$Y_{max} = -\frac{qL^4}{8EI}$$

5.c.- POR MÉTODO DE VIGA CONJUGADA.

Con el gráfico de momento flector y los valores característicos generamos la viga ficticia.



$$Mx = -\frac{qx^2}{2}$$

A la viga ficticia se le aplica como carga el momento flector de la viga dada dividido por EI
La relación establecida entre la viga ficticia y la viga real es que los valores de cortante y momento de la viga ficticia equivalen a la pendiente y a la flecha de la viga real.
Pero en el caso particular de las vigas en voladizo, la pendiente en el apoyo es nula, así como su descenso. En este punto no deberían existir R' ni M' por lo tanto para la aplicación de este método, es necesario invertir el apoyo de la viga ficticia al otro extremo de la viga, de manera de encontrar R' y M'_{max} en el punto correspondiente

$$q' = \frac{M_{max}}{EI} = \frac{qL^2}{2EI}$$

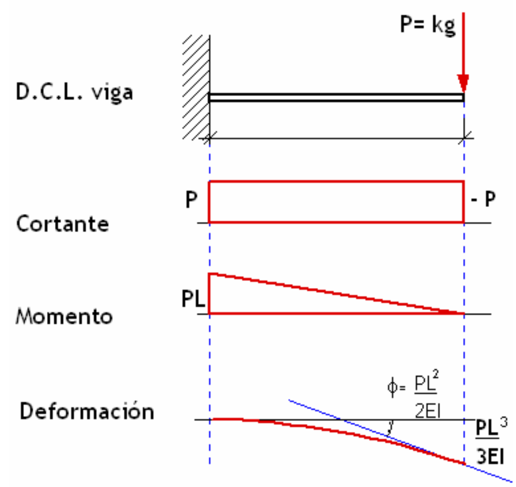
$$\phi_A = Ra' = \frac{qL^2}{2EI}\frac{L}{3}$$

$$\phi_A = \frac{qL^3}{6EI}$$

$$Y_{max} = M'_{max} = \frac{qL^2}{2EI}\frac{L}{3}\frac{3L}{4}$$

$$Y_{max} = \frac{qL^4}{8EI}$$

6.- VIGA EN VOLADIZO CON CARGA PUNTUAL APLICADA EN EL EXTREMO LIBRE

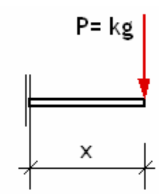


6.a.- POR MÉTODO DE AREA DE MOMENTO.

Establecemos el equilibrio externo.

Ra= P

Determinamos la ecuación general de momento flector.



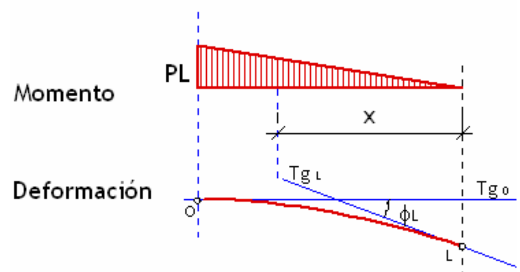
Mx= – Px

El ángulo entre las tangentes trazadas en ambos extremos de la viga lo obtenemos aplicando el Primer Teorema de Mohr.

$$\phi_{L0} = -P.L\frac{L}{2}\frac{1}{EI}$$

$$\phi_{L0} = -\frac{PL^2}{2EL}$$

$$\boxed{\phi_B = \phi_{L0} = -\frac{PL^2}{2EI}}$$

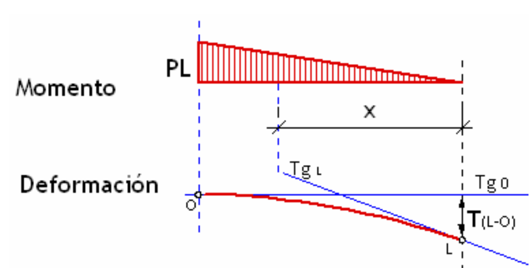


Calculando la desviación tangencial en 0 (extremo libre de la viga) con respecto a la tangente trazada en el otro extremo determinamos la flecha máxima

$$t_{(L-0)} = -\frac{PL^2}{2EI}\frac{2L}{3}$$

$$t_{(L-0)} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

$$\boxed{Y_{max} = t_{(L-0)} = -\frac{PL^3}{3EI}}$$



6.b.- POR MÉTODO DE DOBLE INTEGRACION

Con la ecuación general de momento flector establecemos la ecuación diferencial de la elástica.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Px - PL$$

Integrando dos veces la ecuación diferencial obtenemos:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} - PLx + C_1$$

$$EI.y = \frac{Px^3}{6} - \frac{PLx^2}{2} + C_1x + C_2$$

Según la deformación de la viga, la pendiente es nula cuando X = 0

$C_1 = 0$

Según las condiciones de apoyo, la flecha es nula cuando X = 0

$C_2 = 0$

Entonces las ecuaciones generales de ángulo y flecha son:

Ecuación general de ángulo

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} - PLx$$

Ecuación general de flecha

$$EI.y = \frac{Px^3}{6} - \frac{PLx^2}{2}$$

El valor máximo de ángulo se encuentra en el lado derecho y se obtiene reemplazando X=L en la ecuación correspondiente

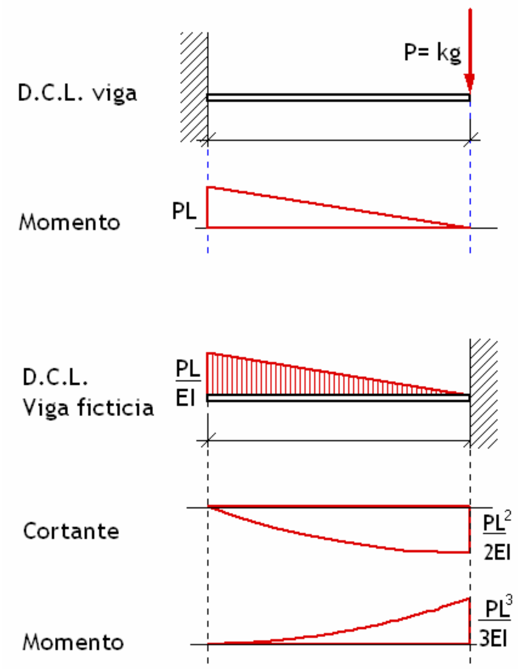
$$\phi_B = -\frac{PL^2}{2EI}$$

Y la flecha máxima reemplazando en X = L.

$$Y_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

6.c- POR MÉTODO DE VIGA CONJUGADA.

Con el gráfico de momento flector y los valores característicos generamos la viga ficticia.



$M = PL$

A la viga ficticia se le aplica como carga el momento flector de la viga dada dividido por EI

Como se ha explicado en el ejemplo anterior, en el caso de las vigas en voladizo, es necesario invertir su apoyo en el otro extremo de la viga para la aplicación del método.

$$q' = \frac{M_{max}}{EI} = \frac{PL}{EI}$$

$$\phi_B = R_B = -\frac{PL}{EI}\frac{L}{2}$$

$$\boxed{\phi_B = -\frac{PL^2}{2EI}}$$

$$Y_{max} = M'_{max} = -\frac{PL}{EI}\frac{L}{2}\frac{2L}{3}$$

$$\boxed{Y_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}}$$

IV.- BIBLIOGRAFIA

Resistencia de Materiales.
William A. Nash.
Editorial McGraw-Hill – México.
Año 1970.

Resistencia de Materiales
S. P. Timoshenko.
Editorial Epasa-Calpe – Madrid.
Año 1980.

Resistencia de Materiales
Ferdinand L. Singer / Andrew Pytel.
Editorial Harle – México.
Año 1982.

V.- INDICE